Aufgabensammlung KomA - Teil I

DGL mit Fouriertransformation:

Löse $\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,y)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}u(x,y)=0 \quad x\in\mathbb{R},\ \underline{y>0}$ wichtig

mit NB $u(x,0)=h(x)$. $h(x)$ abs. integrierbar & $\hat{u}(s,y)$ soll beschränkt sein!

1) Wenden FT mit $f^{(n)}(t) \circ\!\!-\!\!\bullet (is)^n \hat{f}(s)$ an

$\Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial y^2}\hat{u}(s,y)-s^2\hat{u}(s,y)=0$, DGL in y

2) Lösen DGL mittels Euler-Ansatz: $\hat{u}(s,y)=e^{\lambda y}$

$\Rightarrow \hat{u}(s,y)=C_1(s)e^{|s|y}+C_2(s)e^{-|s|y}$

3) Hinweis: $\Rightarrow \underline{C_1(s)=0}$

4) AWP:

$u(x,0)=h(x) \xrightarrow{FT} \hat{u}(s,0)=\hat{h}(s)$

$\Rightarrow C_2(s)e^{-|s|\cdot 0}=C_2(s)=\hat{h}(s)$

$\Rightarrow \hat{u}(s,y)=\hat{h}(s)e^{-|s|y}$, $\hat{f}(s):=e^{-|s|y}$

5) Rücktransformation und Lösungsfindung mit $f(t)*h(t)\circ\!\!-\!\!\bullet \hat{f}(s)\cdot\hat{h}(s)$, $\frac{1}{t^2+1}\circ\!\!-\!\!\bullet \pi\cdot e^{-|s|}$, $f(at)\circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{|a|}\hat{f}\left(\frac{s}{a}\right)$

$\Rightarrow u(x,y)=h(x)*f(x)$

$f(x)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{y}{x^2+y^2}$, denn $\hat{f}(s)=e^{-|s|\cdot y}\overset{y>0}{=}e^{-|s|\cdot|y|}=\frac{1}{|y|\cdot\pi}\left[\frac{1}{\left(\frac{x}{y}\right)^2+1}\right]^{\wedge}(s)=\frac{1}{y\pi}\left[\frac{y^2}{x^2+y^2}\right]^{\wedge}(s)$

$$\Rightarrow u(x,y)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y}{\pi(\tau^2+y^2)}h(x-\tau)d\tau$$

Residuum mittels Cauchy-Produkt:

$f(z)=\frac{e^{\frac{1}{z}}}{z-1}$ $\left.\begin{matrix}\to z=0\\ \to z=1\end{matrix}\right\}$ Singularitäten

$z=1$:

$\lim_{z\to1}(z-1)\frac{e^{\frac{1}{z}}}{z-1}=\lim_{z\to1}e^{\frac{1}{z}}=\underline{e} \Rightarrow \underline{\underline{\mathrm{Res}(f|z=1)=e}}$

$z=0$:

$e^{\frac{1}{z}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\cdot\frac{1}{z^k}$ und $\frac{1}{z-1}=-\frac{1}{1-z}=-\sum_{k=0}^{\infty}z^k$

$\Rightarrow e^{\frac{1}{z}}\cdot\frac{1}{z-1}=-\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\cdot\frac{1}{z^k}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}z^k\right)=-\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\frac{1}{z^k}\cdot z^{n-k}$

$=-\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}z^{n-2k}$

$\rightsquigarrow$ Wir suchen $c_{-1} \rightsquigarrow n-2k\overset{!}{=}-1 \Rightarrow k=\frac{n+1}{2}$

• da $k\in\mathbb{Z}$ muss n eine ungerade Zahl sein $n=2\ell+1$

$\Rightarrow n=2\ell+1,\ k=\frac{2\ell+2}{2}=\ell+1$

$\Rightarrow -\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}z^{n-2k}\Rightarrow -\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{1}{(\ell+1)!}z^{-1}$ $\to$ Reihe d. Koeff.!

$\Rightarrow \mathrm{Res}(f|z=0)=\underbrace{-\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{1}{(\ell+1)!}}_{1!+2!+\dots}=+1-\underbrace{\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{1}{k!}}_{0!+1!+2!+\dots}=\underline{-e+1}$

$\Rightarrow \underline{\underline{\mathrm{Res}(f|z=0)=-e+1}}$

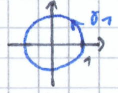
Trigonometrische Integrale mit Residuensatz:

$\int_0^{2\pi}\frac{1}{1-2a\cos\theta+a^2}d\theta$ für i) $|a|<1$ ii) $|a|>1$

1. $\cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \Rightarrow \int_0^{2\pi}\frac{1}{1-ae^{i\theta}-ae^{-i\theta}+a^2}d\theta$

2. Substitution $z=e^{i\theta}$, $d\theta=\frac{1}{iz}dz$

$\Rightarrow \int_{|z|=1}\frac{1}{(1-az-\frac{a}{z}+a^2)iz}dz=\int_{|z|=1}\frac{i}{az^2-(a^2+1)z+a}dz$



3. Residuensatz über γ_1

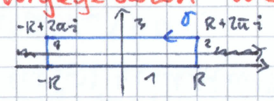
↳ Residuen $z_1=a$, $z_2=\frac{1}{a}$ (normal berechnen)

4. i) z_1 im Bereich ii) z_2 im Bereich

↳ Residuenwert berechnen: z_1: $\underline{\underline{\frac{2\pi}{1-a^2}}}$ z_2: $\underline{\underline{\frac{2\pi}{a^2-1}}}$

Integralberechnung über vorgegebenen Weg:

$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ax}}{1+e^x}dx$ $0<a<1$ über γ:



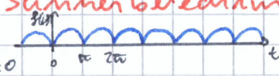
1. Teile Weg in 4 Abschnitte auf
2. Berechne Residuen in γ & Wert
3. Zeige γ_2 & $\gamma_4 \to 0$ (Abschätzen)
4. Betrachte γ_3 genau, suche geeignete Parametrisierung (hier $z=t+2\alpha i$, $dz=dt$) und bring es auf ein Vielfaches von γ_1
↳ $\int_{\gamma_3}f(z)dz=-e^{\alpha 2\pi i}\int_{\gamma_1}f(z)dz$
5. Stell Residuensatz nach $\int_{\gamma_1}f(z)dz$ um

$\Rightarrow \int_{\gamma}f(z)dz=\int_{\gamma_1}..dz+0+(-e^{\alpha 2\pi i}\int_{\gamma_1}..dz)+0=2\pi i(-e^{\alpha\pi i})$

$\Rightarrow \lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_1}f(z)dz=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{\alpha x}}{1+e^x}dx=\frac{-2\pi i e^{\pi i}}{1-e^{2\alpha\pi i}}=\frac{\pi}{\frac{e^{\alpha\pi i}-e^{-\alpha\pi i}}{2i}}=\underline{\underline{\frac{\pi}{\sin(a\pi)}}}$

Fourierreihenberechnung & Summenberechnung:

$f(t):=|\sin t|$, $t\in[0,2\pi)$



$\to$ gerade Fkt: $f(-t)=f(t) \Rightarrow \underline{b_k=0}$

$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(t)dt=\frac{2}{\pi}[-\cos(t)]_0^{\pi}=\frac{4}{\pi}$

$a_k=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(t)\cos(kt)dt=\frac{2((-1)^{k+1}-1)}{\pi(k^2-1)}=\begin{cases}0, & k \text{ ungerade}\\ \frac{-4}{\pi(k^2-1)} & \text{sonst}\end{cases}$

⚠ Singularität bei $k=1$: $a_1=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin t\cos t=\underline{0}$

$$\Rightarrow \hat{f}(n)=\frac{2}{\pi}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{-4\cos(2kn)}{\pi(4k^2-1)}$$

Berechnen sie nun folgende Summen:

i) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}$ ii) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n^2-1)^2}$

i) Nicht quadriert $\rightsquigarrow$ wähle n: $\cos(2kn)=1 \Rightarrow \underline{n=0}$

$\Rightarrow f(0)=0\overset{!}{=}\hat{f}(0)=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(4k^2-1)} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}=\underline{\underline{\frac{1}{2}}}$

ii) Quadriert $\rightsquigarrow$ Parseval: $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2(t)dt=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin^2(t)dt$

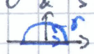
$=\frac{4}{\pi^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{16}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(4k^2-1)^2}$

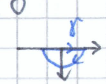
$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin^2 t\,dt=\frac{1}{2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n^2-1)^2}=\left(\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\right)\frac{\pi^2}{8}=\underline{\underline{\frac{1}{16}(\pi^2-8)}}$

Fouriertransformation mit Residuensatz:

$f(t)=\frac{t}{(t^2+1)^2} \Rightarrow \hat{f}(s)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{te^{-ist}}{(t^2+1)^2}dt$

Wollen Integral mittels Residuensatz bestimmen $\rightsquigarrow$ analog zu uneigentlichen Integralen, einziger Unterschied: Fallunterscheidung $s<0$ & $s\geq0$

$s<0$: Betrachte folgenden Weg: 

$s\geq0$: Betrachte " : 

Finden $s<0$: $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{ze^{-isz}}{(z^2+1)^2}dz=\frac{-\pi ise^{s}}{2}$

$s\geq0$: $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{ze^{-isz}}{(z^2+1)^2}dz=\underline{\underline{\frac{-\pi ise^{-s}}{2}}}$

Daraus folgt nun unter Betrachtung aller s:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{ze^{-isz}}{(z^2+1)^2}dz=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{te^{-ist}}{(t^2+1)^2}dt=\hat{f}(s)=\underline{\underline{-\frac{\pi i}{2}se^{-|s|}}}$$

(Das s im Exponent hat das Vorzeichen gewechselt, deshalb Betrag!)

Integralberechnung mittels Fouriertransform.:

$$\int_0^\infty \frac{t\sin(7t)}{(t^2+1)^2}\,dt = \frac12\int_{-\infty}^\infty \frac{t\sin(7t)}{(t^2+1)^2}$$

Wissen aus einer vorherigen Aufgabe, dass

$$\hat f(s)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{t e^{-ist}}{(t^2+1)^2}\,dt = -\frac{\pi i}{2}\, s\, e^{-|s|}$$, es folgt:

$$\frac12\int_{-\infty}^\infty \frac{t\sin(7t)}{(t^2+1)^2}\,dt = \frac12 \,\mathrm{Im}\left(\int_{-\infty}^\infty \frac{t e^{i7t}}{(t^2+1)^2}\,dt\right)$$

$$=\frac12\,\mathrm{Im}\left(-\frac{\pi i}{2}(-7)e^{-7}\right) = \frac{7\pi}{8}e^{-7}$$

Integral mit Plancherel:

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{(x^2+2)^2}{(x^4+4)^2}\,dx \Leftrightarrow \int_{-\infty}^\infty |f(x)|^2\,dx \quad \text{mit } f(x)=\frac{x^2+2}{x^4+4}$$

Wissen aus vorhergehenden Aufgabe, dass

$$\hat f(s) = \int_{-\infty}^\infty \frac{(t^2+2)e^{-ist}}{t^4+4}\,dt = \pi e^{-|s|}\cos(s)$$

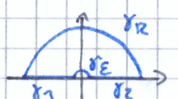
Benutzen Satz von Plancherel und finden:

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{(t^2+2)^2}{(t^4+4)^2}\,dt = \frac{1}{2\pi}\underbrace{\int_{-\infty}^\infty \pi^2 e^{-2|s|}\cos^2(s)\,ds}_{\text{gerade Fkt}}$$

$$\Rightarrow \pi\int_0^\infty e^{-2s}\cdot\frac12(1+\cos(2s))\,ds = \{\text{part. Int usw.}\} = \frac{3\pi}{8}$$

Integral über Singularität auf reeller Achse:

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin(x)}{x(x^2+1)}\,dx = \mathrm{Im}\left(\frac{e^{iz}}{z(z^2+1)}\right)$$



Residuensatz über folgenden Weg:

Mit $\varepsilon\to0$ & $R\to\infty$ finden folgende Singularitäten:

$z_1=0,\ z_2=i,\ z_3=-i$ ⇝ interessiert nur in z_1 & z_2

⇝ $\mathrm{Res}(f(z)|z_1)=1$, $\mathrm{Res}(f(z)|z_2)=-\frac{1}{2e}$

Argumentieren: Da z_1 Pol 1. Ordnung und $\exists U\subset\mathbb C$: $f: U\setminus\{z_1\}\to\mathbb C$ holomorph, dürfen wir Satz aus Übung 7.2 benutzen ⇝ $\lim_{\varepsilon\to0}\int_{\gamma_\varepsilon} f(z)\,dz = -\alpha\cdot i\cdot \mathrm{Res}(f(z)|z_1) = -\pi i$

⇝ Zeige $\gamma_R=0$ ⇒ $\int_{\gamma_R}..dz = \int_{\gamma_1}..dz+\int_{\gamma_2}..dz - \pi i + 0$

⇒ $\int_{\gamma_1}..dz+\int_{\gamma_2}..dz = 2\pi i\left(-\frac{1}{2e}\right)+\pi i = \pi i\left(1-\frac1e\right)$

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin x}{x(x^2+1)}\,dx = \mathrm{Im}\left(\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{iz}}{z(z^2+1)}\,dz\right) = \mathrm{Im}\left(\pi i\left(1-\frac1e\right)\right) = \pi\left(1-\frac1e\right)$$

Gewöhnliche DGL mit Fouriertransformation:

$-u''(t)+\alpha^2u(t)=h(t)$, $t\in\mathbb R$

1) HDGL: $u(t)_h = C_1e^{\alpha t}+C_2e^{-\alpha t}$

2) part. Lsg:

⇒ $s^2\hat u(s)+\alpha^2\hat u(s)=\hat h(s)$ (Fouriertransformiert)

$\hat u(s)=\frac{\hat h(s)}{(s^2+\alpha^2)}$ | $\hat g(s):=\frac{1}{s^2+\alpha^2}$

$u(t)_p = h(t)*g(t) = \frac{1}{2\alpha}\int_{-\infty}^\infty e^{-\alpha|t|}h(t-\tau)\,d\tau$ | $e^{-\alpha t} \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{2\alpha}{\alpha^2+s^2}$

⇒ $u(t)=u(t)_h+u(t)_p = C_1e^{\alpha t}+C_2e^{-\alpha t}+\frac{1}{2\alpha}\int_{-\infty}^\infty e^{-\alpha|t|}h(t-\tau)\,d\tau$

Partielle DGL mittels Fouriertransformation:

$\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,y)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}u(x,y)=0$ $\quad x\in\mathbb R,\ y>0,\ u(x,0)=h(x)$, $FT\{u(\cdot,y)\}$ beschränkt?

FT bzgl. x: $\frac{\partial^2}{\partial y^2}\hat u(s,y)-s^2\hat u(s,y)=0$

⇝ Bzgl. y lösen ⇒ Euler-Ansatz:

⇒ $\hat u(s,y)=C_1(s)e^{|s|y}+C_2(s)e^{-|s|y}$

AWP: $\hat u(s,0)=\hat h(s)$ & $\lim_{s\to\infty}\hat u(s,y)<\infty$

⇒ $C_1(s)=0$ & $C_2(s)=\hat h(s)$

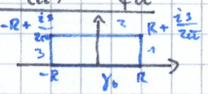
Rücktrafo: $u_h(x,y)=\int_{-\infty}^\infty \frac{y}{\pi(\tau^2+y^2)}\cdot h(x-\tau)\,d\tau$

FT einer Exp. Fkt. mit t^2:

$f(t):=e^{-\pi t^2}$ ⇝ $\hat f(s)=\int_{-\infty}^\infty e^{-\pi t^2}e^{-ist}\,dt=\int_{-\infty}^\infty e^{-\pi t^2-ist}\,dt$

1) Exponent quadr. ergänzen: $-\pi\left(t+\frac{is}{2\pi}\right)^2-\frac{s^2}{4\pi}$

⇒ $\hat f(s)=e^{-\frac{s^2}{4\pi}}\int_{-\infty}^\infty \underbrace{e^{-\pi\left(t+\frac{is}{2\pi}\right)^2}}_{g(t)}\,dt$



2) Satz v. Cauchy auf folg. Weg:

⇝ $\int_{\gamma_R}..dt = \int_{\gamma_0}..dt+\int_{\gamma_1}..dt+\int_{\gamma_2}..dt+\int_{\gamma_3}..dt=0$

3) Zeigen $\int_{\gamma_1}..dt=\int_{\gamma_3}..dt=0$ (Abschätzen!)

4) ⇒ $\int_{\gamma_0}..dt=-\int_{\gamma_2}..dt=\int_{-\gamma_2}..dt=\int_{-R\to\infty}^{R\to\infty}e^{-\pi t^2}\,dt \overset{\wedge}{=} 1$ Gauss-Integral

2) 1) $=\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty e^{-\pi t^2-\pi\tau^2}\,dt\,d\tau = \left\{\begin{matrix}t=r\cos\varphi\\ \tau=r\sin\varphi\end{matrix}\right\} = \int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^\infty re^{-\pi r^2}\,dr=1$

⇒ $\hat f(s)=e^{-\frac{s^2}{4\pi}}\cdot1=e^{-\frac{s^2}{4\pi}}$

DGL mit Laplace & Heaviside:

$y''+2y'+2y=h(t)$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$, $h(t)=\begin{cases}1, & t\in[\pi,2\pi]\\0, & \text{sonst}\end{cases}$

$\mathcal L\{y''+2y'+2y\}=s^2F(s)-1+2sF(s)+2F(s)$

$\mathcal L\{h(t)\}=\int_\pi^{2\pi}1\cdot e^{-st}\,dt=\left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_\pi^{2\pi}=\frac{e^{-\pi s}}{s}-\frac{e^{-2\pi s}}{s}$

⇒ $F(s)=e^{-\pi s}\underbrace{\frac1s\cdot\frac{1}{(s+1)^2+1}}_{PBZ}-e^{-2\pi s}\underbrace{\frac1s\cdot\frac{1}{(s+1)^2+1}}_{PBZ}+\frac{1}{(s+1)^2+1}$

⇒ $F(s)=e^{-\pi s}\left(\frac{1}{2s}-\frac{s+1+1}{2((s+1)^2+1)}\right)-e^{-2\pi s}\left(\frac1{2s}-\frac{s+1+1}{2((s+1)^2+1)}\right)+\frac{1}{(s+1)^2+1}$

Rücktrafo mit $\mathcal L^{-1}$: $e^{at}\sin(bt)\circ\!\!-\!\!\bullet\frac{b}{(s-a)^2+b^2}$, $e^{at}\cos(bt)\circ\!\!-\!\!\bullet\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$

$f(t-c)h(t-c)\circ\!\!-\!\!\bullet e^{-cs}F(s)$, $1\circ\!\!-\!\!\bullet\frac1s$

↳ $f(t)=h(t-\pi)\left(\frac12-\frac12e^{-(t-\pi)}\cos(t-\pi)-\frac12e^{-(t-\pi)}\sin(t-\pi)\right)-$

$h(t-2\pi)\left(\frac12-\frac12e^{-(t-2\pi)}\cos(t-2\pi)-\frac12e^{-(t-2\pi)}\sin(t-2\pi)\right)+e^{-t}\sin(t)$

mit $h(t-c)=\begin{cases}0 & t<c\\1 & t\ge c\end{cases}$ Heaviside Fkt.

Taylorentwicklung in $z_0\neq0$:

$f(z)=e^z$ in $z_0=1$

Entweder mittels Definition oder mit Trick:

→ wollen $\sum\dots(z-1)^k$, sieht aus wie e^{z-1}

⇒ $e^z=e\cdot e^{z-1}=e\cdot\sum_{k=0}^\infty\frac{(z-1)^k}{k!}=\sum_{k=0}^\infty\frac{e}{k!}(z-1)^k$

Laurentreihenentwicklung in Kreisring:

$f(z)=\underbrace{\frac{1+z}{-z^2+3z-2}}_{PBZ}+\frac{1}{z-3}$ auf $A_{1,2}=\{z\in\mathbb C:1<|z|<2\}$, $A_{2,3}=\{z\in\mathbb C:2<|z|<3\}$

PBZ: $\frac{1+z}{(z-1)(-z+2)}=\frac{2}{z-1}+\frac{3}{2-z}$

Bilden alle Reihen mit passenden Radien:

$\frac1{z-3}=-\frac13\frac1{1-\frac z3}=-\frac13\sum_{k=0}^\infty\left(\frac z3\right)^k=-\sum_{k=0}^\infty\left(\frac13\right)^{k+1}z^k$ $\quad|z|<3$ reicht?

$\frac2{z-1}=-\frac{2}{1-z}=-2\sum_{k=0}^\infty z^k$ $\quad|z|<1$ unnötig, reicht nicht

$\frac2z\frac1{1-\frac1z}=\frac2z\sum_{k=0}^\infty\left(\frac1z\right)^k=2\sum_{k=0}^\infty\left(\frac1z\right)^{k+1}$ $\quad|z|>1$ reicht

$\frac3{2-z}=\frac32\frac1{1-\frac z2}=\frac32\sum_{k=0}^\infty\left(\frac z2\right)^k$ $\quad|z|<2$ reicht nicht

$-\frac3z\frac1{1-\frac2z}=-\frac3z\sum_{k=0}^\infty\left(\frac2z\right)^k=-3\sum_{k=0}^\infty 2^k\left(\frac1z\right)^{k+1}$ $\quad|z|>2$ reicht

$A_{1,2}$: $f(z)=\sum_{k=0}^\infty\left(-\left(\frac13\right)^{k+1}z^k+2\left(\frac1z\right)^{k+1}+\frac32\left(\frac z2\right)^k\right)$

$A_{2,3}$: $f(z)=\sum_{k=0}^\infty\left(-\left(\frac13\right)^{k+1}z^k+2\left(\frac1z\right)^{k+1}-3\cdot2^k\left(\frac1z\right)^{k+1}\right)$ } Zusammensetzen

Aufgabensammlung KomA - Teil II

Fourierreihenberechnung trig. Fkt.:

Berechne $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{f}(k) e^{2\pi i k z}$ der 1-period. Fkt

$$f(z) = \frac{1}{1+\tan^2(2\pi z)}$$

NICHT berechnen! Einfach umformen:

$$f(z) = \frac{1}{1+\tan^2(2\pi z)} = \cos^2(2\pi z) = \frac{1}{2}(1+\cos(4\pi z))$$

mit $\cos(z) = \dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} \Rightarrow \mathcal{F}(f(z)) = \underline{\underline{\frac{1}{4}\left(2+e^{4\pi i z}+e^{-4\pi i z}\right)}}$

Klassifizieren aller isolierten Singul.:

$$f(z) = e^{(z+2)^2-(z-2)^{-2}} = e^{(z+2)^2} e^{-(z-2)^{-2}}$$

Die Funktion $h(z) = (z+2)^2 - (z-2)^{-2}$

hat in $z_0 = 2$ einen Pol erster Ordnung.

Wir wissen:

Hat $f(z)$ in z_0 einen Pol, dann hat

$g(z) = e^{f(z)}$ in z_0 eine wesentliche

Singularität!

Oder alternativ: Man berechnet die

Taylorreihe von $e^{-(z-2)^{-2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2-k)^{-2k}}{k!}$

$\Rightarrow$ ∞-viele negative Exponenten.

Hauptteil der relevanten Laurentreihe:

für die Singularität $z_0 = -\pi$

$$f(z) = \frac{\cos(z)}{(z^2-\pi^2)(z+\pi)}$$

Müssen die Reihenentwicklung um $z_0 = -\pi$, also der Form $\sum_k (z+\pi)^k$ finden:

$$\cos(z) = -\cos(z+\pi) \Rightarrow f(z) = \frac{-\cos(z+\pi)}{(z-\pi)(z+\pi)^2}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{-1}{z-\pi}} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z+\pi)^{2k-2}}{(2k)!}$$

müssen wir in $z_0 = -\pi$ entwickeln!

$$\Rightarrow \frac{-1}{z-\pi} = \frac{1}{\pi - z} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{1-\left(\frac{z+\pi}{2\pi}\right)} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z+\pi)^k}{(2\pi)^k}$$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+\pi)^n}{(2\pi)^n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z+\pi)^{2k-2}}{(2k)!}$$

$\Rightarrow$ Nur am Hauptteil interessiert:

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi}\left(1 + \frac{(z+\pi)}{2\pi}\right)\left(\frac{1}{(z+\pi)^2}\right)$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{2\pi(z+\pi)^2} + \frac{1}{4\pi^2(z+\pi)^1}}}$$

Alle Sätze kompakt

Goursat: f stetig + ableitbar $\Rightarrow f'$ stetig

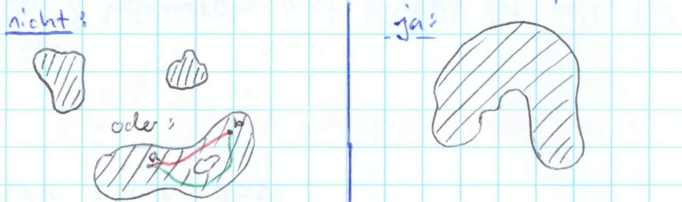
Gauss-Fundamentalsatz der Algebra:
Körper $\mathbb{C}$ algebraisch abgeschlossen $\to$ sei $P(z)$ ein Polynom mit kompl. Koeffizienten: entweder P ist konstant oder aber P hat min. 1 komp. Nullstelle $z_0 \in \mathbb{C}$, $P(z_0) = 0$

Satz über die Stammfunktion:
Es gelten folgende äquivalente Aussagen:
(i) Für jede geschlossene Kurve $\gamma : [0,1] \to U$ gilt:
$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0$$

(ii) Es gibt eine Funktion $F : U \to \mathbb{C}$ diffbar mit
$$F'(z) = f(z)$$

$\Rightarrow$ trifft (i) o. (ii) zu, so gilt:
$$\int_\gamma f(z)\,dz = F(\gamma(1)) - F(\gamma(0))$$

Satz über Homotopie & Zusammenh. Mengen:
Eine offene Teilmenge $U \subseteq \mathbb{C}$ heisst einfach zusammenhängend, falls U zusammenhängend ist und $\forall a, b \in U$ alle Pfade von a nach b homotop sind:



Satz von Cauchy: $U \subseteq \mathbb{C}$ einf. zus. & $f : U \to \mathbb{C}$ holom.
$\to f$ besitzt eine Stammfunktion $\to \oint_\gamma f(z)\,dz = 0$

Integralsatz von Cauchy: U s.o., γ geschl., f holom.
$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz$$

Goursat-Erweiterung: Holomorphe Funktionen sind beliebig oft ableitbar.

Mittelwertsatz: Folgt aus Integralsatz mit $\gamma = z_0 + e^{2\pi i t}$
f holom. auf $U \subseteq \mathbb{C}$, $z_0 \in U$, $r > 0$ s.d. $B(z_0, r)$ inkl. Rand $\in U$. Dann gilt:
$$f(z_0) = \text{Mittelwert von } f \text{ auf dem Kreis mit Zentr. } z_0\text{, Radius } r = \int_0^1 f(z_0 + r e^{2\pi i t})\,dt$$

Satz von Liouville: $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holom. $\Leftrightarrow$ "ganz"
Ist $|f(z)|$ beschränkt, dann ist f konstant.

Satz von Taylor: $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $0 \in U$, $f : U \to \mathbb{C}$ holom.
Sei $B(0,r)$ Kreisscheibe um 0, $\in U$ inkl. Rand, dann gilt:
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ mit } a_i = \frac{1}{i!} f^{(i)}(0)$$
für alle $z \in B(0,r)$.
Die Reihe konvergiert absolut $\forall\ |z| < r$

Satz von Laurent: $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ holom. $0 < r < R < \infty$
$\{z \in \mathbb{C} \mid r \le |z| \le R\} \subseteq U$ dann:
$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n,\ r < |z| < R,\ a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z^{n+1}}\,dz$$

Identitätssatz: $U \subseteq \mathbb{C}$ offen & einf. zusam. $f, g : U \to \mathbb{C}$ holo.
$f(z) = g(z)\ \forall z$ in einer Umgebung von z_0. Dann
$$f = g$$
auf ganz U.

Satz vom Maximum: $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, einf. zus., f holom.
$V \subseteq U$ Gebiet mit ∂V Rand.
Die Funktionen $|f|, \operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f$ nehmen ihr Maximum in V auf ∂V an:
$$\max_{z \in V} |f(z)| = \max_{z \in \partial V} |f(z)|$$

$\Rightarrow$ **Maximumsprinzip:**
Nehmen $|f|$, $\operatorname{Re} f$ oder $\operatorname{Im} f$ innerhalb von U ein lokales Maximum an, so ist f in einer Umgebung von z_0 konstant $\xrightarrow[\text{Identitäts-satz}]{}$ f ist konstant auf ganz U

⚠ Für $\operatorname{Re} f$ & $\operatorname{Im} f$ ist die Aussage auch auf das Minimum ausweitbar, da
$\operatorname{Re}(-f) = -\operatorname{Re} f$ & $\operatorname{Im}(-f) = -\operatorname{Im} f$

Residuensatz: $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $\gamma : [0,1] \to U$ Weg in U, der ein Gebiet V in positiver Richtung umläuft.
Im Innern von V liegen $z_1, z_2, \dots, z_n$. $f : U \setminus \{z_1, \dots, z_n\} \to U$ holo.
$$\Rightarrow f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$
Wir nennen $a_{-1} = \operatorname{Res}(f|z_0)$ Residuum von f an z_0
$$\Rightarrow \int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \cdot \sum_{n=1}^{N} \operatorname{Res}(f|z_n)$$

Minimumsprinzip:
Die Real- und Imaginärteile haben überdies auch kein striktes, lokales Minimum und die Minima der Absolutbeträge werden an Punkten angenommen an denen die Funktion verschwindet $\to f(z_0) = 0$.

Dirichlet-Bedingung:
Ist die Funktion f stetig bis auf endlich viele Unstetigkeiten im zu betrachtenden Intervall, so hat die Fourierrücktransformierte folgende Werte:
$$\hat{\hat{f}}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\tfrac{2\pi}{T} n t\right) + b_n \sin\left(\tfrac{2\pi}{T} n t\right)$$
$$= \begin{cases} f(t), & \text{falls } f \text{ in } t \text{ stetig} \\ \dfrac{f(t+) + f(t-)}{2}, & \text{falls } f \text{ in } t \text{ unstetig} \end{cases}$$
$\Rightarrow$ also gleich dem Mittelwert des linken und rechten Grenzwertes

Satz von Parseval: *
Besagt, dass die L^2-Norm einer Fourierreihe mit der ℓ^2-Norm ihrer Fourier-Koeff. übereinstimmt
$$\|f\|_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2\,dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (|a_k|^2 + |b_k|^2)$$

Satz von Plancherel: *
$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\,dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(s)|^2\,ds$$
$\to$ kann benutzt werden um komplizierte Integrale durch simplere zu lösen.